Aplicaciones de las matemáticas al modelado de una economía

Humberto Muñiz[1]

[1] Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Facultad de Economía, Av. de los Pintores s/n, Burócrátas del Estado, 78213 San Luis Potosí, S.L.P., México, Humberto.Muniz@uaslp.mx

Resumen

Con el objetivo de promover entre los estudiantes de nivel licenciatura, tanto de ciencias sociales como de ingeniería, el uso del formalismo matemático para modelar situaciones de la vida real, en el presente trabajo se muestra un modelo matemático aplicado al equilibrio general, el cual involucra el uso de herramientas de cálculo diferencial, matemáticas financieras, álgebra matricial y economía. Para conseguir este objetivo en el presente trabajo se utiliza un modelo neoclásico de economía con producción de propiedad privada (economía en la cual los consumidores tienen participación directa en sobre el beneficio generado por las empresas) señalando en la medida de lo posible las relaciones existentes entre los supuestos e hipótesis del modelo con la vida real, hacer este tipo de relaciones es importante para mostrar a los estudiantes que la mayoría de las hipótesis abstractas en los modelo tienen como objetivo capturar la esencia de los problemas de la vida cotidiana. Una vez descritos los fundamentos de este tipo de modelos y lo que estos buscan representar de la realidad se plantea una posible línea de investigación que extiende los resultados existentes sobre la aplicación del formalismo matemático a la economía, esta posible nueva línea de investigación se centra en el uso del cálculo diferencial y la teoría de conjuntos para modelar decisiones de diversificación de mercado de las empresas en una economía, por lo que puede plantear un problema interesante y realizable para estudiantes de licenciatura con formación en áreas donde se curse este tipo de materias.

Palabras clave— **Modelos matemáticos, aplicaciones de las matemáticas a la economía, equilibrio general, diversificación de mercado.**

Abstract

Intending to promote among undergraduate students, both in social sciences and engineering, the use of mathematical formalism to model real-life situations, this work shows a mathematical model applied to general equilibrium, which involves differential calculus tools, financial mathematics, matrix algebra, and economics. To achieve this objective, this work uses a neoclassical model of economy with privately owned production (an economy in which consumers have direct participation in the profit generated by companies), pointing out, as far as possible, the existing relationships between the assumptions and hypotheses of the model with real life, making these types of relationships is important to show students that most of the abstract hypotheses in the models are intended to capture the essence of everyday life problems. Once the foundations of this type of model and what they seek to represent about reality have been described, a line of research is proposed that extends the existing results on the application of mathematical formalism to economics. This possible new line of research focuses on the use of differential calculus and set theory to model market diversification decisions of companies in an economy, so it can pose an interesting and feasible problem for undergraduate students with training in areas where this type of subject is taken.

Keywords— **Mathematical models, applications of mathematics to economics, general equilibrium, market diversification.**

I. INTRODUCCIÓN

El uso del formalismo matemático para modelar y dar soluciones a problemáticas de la vida real es cada vez más frecuente, modelos como los de crecimiento población en la biología emplean el uso de funciones exponenciales y ecuaciones diferenciales para explicar el rápido crecimiento de una población. Por su parte, en áreas como la medicina el uso de sistemas dinámicos ha ganado relevancia en los últimos tiempos al implementar técnicas de codificación para diagnosticar arritmias cardiacas (Maldonado *et al.*, 2004). Mientras que en áreas como la óptica estas han ayuda a modelar como viaja la luz a través de una fibra óptica, lo cual ha traído grandes avances no solo en esta disciplina, sino que también en su aplicación a diferentes áreas de las ciencias de la salud (en medicina en tratamientos de tumores (Mansilla, 2014) por ejemplo) o las telecomunicaciones (internet (Macheso *et al.,* 2003)).

Contrario a la creencia de que el uso de las matemáticas y el modelado matemático se limita solo a áreas relacionadas con la ingeniería, la física, la medicina o la biología, su uso va más allá, en áreas de las ciencias sociales como lo es la psicología, las herramientas matemáticas provenientes de la estadística han ayuda a validar estudios e hipótesis mediante el procesamiento y análisis de datos (ver por ejemplo (Cowles, 2005) para profundizar en aplicaciones en esta área). Mientras que en la administración las técnicas estadísticas son utilizadas en la toma decisiones (Villegas, 2019).

A nivel más teórico y abstracto, fuera del uso de la estadística, las herramientas matemáticas formales como los son la teoría de conjuntos, el análisis matemáticos, análisis funcional, la topología, ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos han encontrado un gran campo de acción en la economía, donde, como se muestra en (Accinelli *et al.*, 2016), (Accinelli *et al.*, 2021), (An *et al.*, 2023), (Enríquez, 2016), (Mas-Colell *et al.*, 1995) entre otros, estas herramientas son utilizadas para modelar problemas propios de la macroeconomía como lo son las expectativas de crecimiento de un país o a nivel micro en el modelado de restricciones de presupuesto, de las repercusiones de los impuestos al bienestar social, a determinar patrones en la demanda-oferta de bienes, a la determinación de equilibrios de mercado y al modelado de la evolución de las decisiones de inversión dentro de una empresa y sus repercusión en la economía. Sin embargo, la mayoría de esto modelos, por su naturaleza, dejan lado la explicación fundamenta en observables reales o cotidianos de sus supuestos más elementales enfocándose solo en los fundamentos matemáticos abstractos que lo describen, esto en muchas ocasiones provoca que se tenga el concepto equivocado de que este tipo de modelos son demasiado abstractos y sus condiciones demasiado alejadas de la realidad que tratan de describir.

Por otro lado, aun aquellos modelos menos abstractos suelen estar enfocados a públicos especializados en ciertas áreas, dejando de lado aquellos interesados que apenas comienzan en el estudio de la formalidad matemática y sus aplicaciones en la vida cotidiana.

La importancia del modelado de situaciones reales como una manera de incentivar a los jóvenes a estudiar matemáticas ha sido ampliamente reconocido en trabajos tales como (Olkun e*t al.*, 2010) y (Özdemir e*t al.*, 2013), por lo que siguiendo lo desarrollado en (Accinelli *et al.*, 2016) y (Accinelli *et al.*, 2021) y con el objetivo de incentivar a estudiantes de licenciatura, sobre todo de áreas sociales e ingeniería, a utilizar el formalismo matemático para modelar problemas de la vida cotidiana, en este trabajo se profundiza y describe en términos de observables reales una aplicación del cálculo diferencial, cálculo multivariado, álgebra matricial y teoría de conjuntos a la economía, en particular al modelado de problemas de equilibrio general, mediante el uso de modelos de economías neoclásicas de propiedad privada.

El desarrollo del presente trabajo se plantea como sigue: En las secciones II a la VI se describe de forma formal en modelo de economía con producción de propiedad privada puntualizando en la medida de lo posible la interpretación de los supuestos del modelo en términos reales. Una vez descrito el modelo en la sección VII se muestra una generalización posible de este para modelar problemas de diversificación de mercado. En la sección VII se da algunas conclusiones y posibles líneas de investigación futura mediante el uso de este tipo de modelos.

II. Descripción Matemática de una Economía

El objetivo principal de este trabajo es el mostrar una aplicación interesante para estudiantes de licenciatura del modelado matemático a la economía. La aplicación que aquí se muestra relaciona conceptos de cálculo diferencial, álgebra matricial, y teoría de conjuntos, con conceptos clave de la economía como son oferta, demanda, exceso de demanda, restricción presupuestaría, equilibrio de mercado, entre otros.

Para conseguir el objetivo de este trabajo, se comienza presentado la definición formal/matemática de economía con producción de propiedad privada con 2 bienes, 2 consumidores y 2 firmas, una vez establecida la definición se procede a describirla, explicarla y justificarla a detalle.

Definición 1. (Economía con producción de propiedad privada) Una economía de propiedad privada $\mathcal{E}$ con 2 bienes, 2 firmas y 2 consumidores está definida por el conjunto

$$\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^2, (U_i, \omega^i, \theta_{ij}), g_j, i \in \{1,2\}, j \in \{1,2\}\}$$

Donde

- $\mathbb{R}^2$ es el espacio de consumo y $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0\}$, es el espacio de consumo y de precios.
- U_i denota la función de utilidad que representa a las preferencias o gustos del consumidor $i \in \{1,2\}$, la cual se asume es cuasi cóncava.
- $\omega^i \in \mathbb{R}^2_+$ denotan las dotaciones iniciales del consumidor $i \in \{1,2\}$.
- $\theta_{ij} \in [0,1]$ es la participación o derecho del consumidor i sobre el beneficio de la firma j.
- g_j denota la función de producción la firma $j \in \{1,2\}$, la cual se asume para ser cóncava.

Los supuestos en las funciones de utilidad y producción son para garantizar la solución de los problemas de maximización de las firmas y consumidores que se discutirán más adelante.

$\mathbb{R}^2$denota el conjunto de pares ordenados (x, y) cuyas entradas son números reales (plano cartesiano), $\mathbb{R}^2_+$ denota el cuadrante positivo (primer cuadrante) del plano $\mathbb{R}^2$, el símbolo $\in$ se lee como "pertenece a".

El espacio $\mathbb{R}^2$ se utiliza para denotar el conjunto de bienes en la economía, las entradas negativas denotan cantidades de insumos y las positivas cantidades de producto. $\mathbb{R}^2_+$ es el espacio de consumo, a los elementos $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ se les llama cestas, el número x denota la cantidad que se adquire del primer bien e y denota la cantidad adquirida del segundo.

$U_i: \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es una representación matemática de los niveles de utilidad o satisfacción que alcanza un consumidor al adquirir una cesta de consumo $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$, esto es, $U_i(x, y)$ es un número que representa la valoración que el consumidor le da a la cesta de consumo con una cantidad x, y de cada uno de los dos bienes en la economía, al conjunto de todos los pares que les corresponde un mismo nivel de utilidad se le llama curva de indiferencia.

$\omega^i = (\omega^i_1, \omega^i_2) \in \mathbb{R}^2_+$ es la cesta inicial que cada consumidor tiene al momento de hacer el análisis, esta cesta podría contener cantidades de ambos bienes, solo de uno o de ninguno, esto es, ω^i_1 y ω^i_2 denotan, respectivamente, las cantidades el bien 1 y bien 2 de las que disponen inicialmente el consumidor $i = 1,2$. De cierta manera las dotaciones iniciales de cada consumidor son el "patrimonio" con el que cuenta el consumidor.

$\theta_{ij} \in [0,1]$ representa el porcentaje que cada consumidor $i \in \{1,2\}$ recibe del beneficio de cada una de las firmas $j \in \{1,2\}$, como es típico se impone el supuesto de que entre ambos consumidores de reparten el total de los beneficios generados por cada una de las empresas.

$g_j: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ denota la función de producción de la firma $j = 1,2$, la cual es una simplificación de la realidad y una representación de los niveles máximos de producción que una firma puede alcanzar dado cierto nivel de insumos.

III. Descripción de las Firmas y el Problema de Maximización de Beneficios

A partir de la función de producción de cada empresa, se define el conjunto tecnológico de la firma $j = 1,2$, como sigue:

$$Y_j = \{(y_1, y_2) : y_r < 0, y_j - g_j(-y_r) \leq 0\}, r \neq j \in \{1,2\}$$

Los elementos $(y_1, y_2) \in Y_j$ reciben el nombre de ***planes de producción de la firma j.***

En particular y sin pérdida de generalidad se puede suponer que la firma $j = 1$ produce el primer bien y la firma $j = 2$ el segundo, por lo que en este caso los conjuntos de tecnología pueden ser escritos como

$$Y_1 = \{(y_1, -y_2) : y_2 > 0, y_1 \leq g_1(y_2)\} \text{ y}$$
$$Y_2 = \{(-y_1, y_2) : y_1 > 0, y_2 \leq g_2(y_1)\}$$

Con lo que queda claro porque se habla de niveles máximos de producción. Cuando se produce el bien 1, utilizando como insumo el bien 2, a través de la función de producción g_1, la cantidad $g_1(y_2)$ denotada la cantidad máxima de bien 1 que se puede producir utilizando la cantidad de insumo y_2 y viceversa para el bien 2. Como es típico en economía al conjunto dado por los niveles máximos de producción para distintas combinaciones de insumo se le denomina ***frontera de posibilidades de producción (FPP)***, en términos matemáticos simples la FPP esta descrita completamente por la gráfica de $g_j, j = 1,2$.

Finalmente, antes de proseguir con el modelo, note que si $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2_+$ denotan los precios de cada uno de los 2 bienes ($p_1$el precio del bien 1 y p_2 el del bien 2), entonces el valor de una cesta $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$ está dado por el producto punto de p con x, esto es

$$p \cdot x = p_1 x_1 + p_2 x_2 \qquad (1)$$

Es el valor o costo por adquirir x cantidad del primer producto e y cantidad del segundo a unos precios de p_1 y p_2 respectivamente.

Si bien estos supuestos pudieran parecer alejados de la realidad, la realidad es que no lo son, pues si se considera que el análisis de la economía se hace considerando nuestra posición en la economía y comparándola con el resto de los consumidores, en este caso uno mismo es uno de los consumidores y el otro consumidor es un agregado de todo los demás consumidores (sin incluirnos), de la misma forma 2 bienes es suficiente para realizar un análisis sobre la realidad de una economía, pues se puede considerar por un lado a todos aquellos bienes de primera necesidad y englobarlos en un solo bien (llamado bien de primera necesidad) y por otro englobar a todos aquellos que no lo son. Las dotaciones iniciales pueden ser interpretadas como el hecho indudable de que cada agente en una economía dispone un poco de uno o de algunos de los bienes disponibles en la economía, nótese que al considerar $\omega^i \in \mathbb{R}^2_+$ nos permite considerar la posibilidad de que un consumidor no reciba cantidad alguna de uno o ambos bienes. Finalmente, el considerar que los consumidores tienen participación sobre las firmas y que entre ambos se reparten el total de los beneficios, tiene su justificación en el hecho de que en la realidad los consumidores trabajan para una o algunas empresas de los cuales reciben un sueldo, que se puede pensar como una pequeña parte del beneficio total de una empresa, a la vez que el resto del beneficio es repartido entre el resto de trabajadores y los dueños de las empresas (que a la vez también son consumidores).

Problema de maximización de beneficios:

Dado un sistema de precios $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2_+$, el problema principal de cada firma es el de determinar el plan de producción $y \in Y_j$, para el cual su beneficio sea máximo, esto es, resolver el problema de maximización

$$máx_{y \in Y_j} py \qquad (2)$$

O explícitamente para cada una de las firmas

$$máx\{p_1 g_1(y_2) - p_2 y_2\}$$
$$máx\{p_2 g_2(y_1) - p_1 y_1\}$$

A los vectores $y^1 = (y_1^1, -y_2^1)$ y $y^2 = (-y_1^2, y_2^2)$ que resuelven estos problemas de maximización, para el nivel de precios $p = (p_1, p_2)$, se le llaman oferta de las firma 1 y de la firma 2 respectivamente. Nótese que las soluciones a estos problemas dependen de los precios ya dados, por lo que técnicamente cada vector solución es una función (de 2 variables) que depende de $p = (p_1, p_2)$, por lo que para hacer explícita esta relación se escribe $y^1(p)$ y $y^2(p)$ en lugar de simplemente y^1 y y^2.

IV. Descripción de los Consumidores y el Problema de Maximización de Utilidad

Una vez planteado el problema de las firmas se procede a plantear el problema de los consumidores. En el modelo se asume que los gustos de los consumidores pueden ser representados utilizando funciones de utilidad, y que cada consumidor percibe parte de los beneficios de las firmas, además de que cada uno cuenta con un "patrimonio" definido por sus dotaciones iniciales de cada bien, por lo que por lo que el ingreso del consumidor $i = 1,2$, esta dado por

$$W_i(p, \theta_{i1}, \theta_{i2}, \omega^i) = p \cdot \omega^i + \theta_{i1}\pi_1(p) + \theta_{i2}\pi_2(p)$$

Donde utilizando (1) se puede interpretar a $p \cdot \omega^i$ como el valor (en términos monetarios) del patrimonio del consumidor $i = 1,2$. Mientras que $\theta_{i1}\pi_1(p)$ y $\theta_{i2}\pi_2(p)$ corresponden a las cantidades que percibe el consumidor por su participación en cada una de las firmas.

Una vez descrito el ingreso del consumidor $i = 1,2$, la restricción presupuestaria de este está definida por el conjunto

$$\mathcal{B}^i(p) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : p \cdot x \leq W_i(p, \theta_{i1}, \theta_{i2}, \omega^i)\}$$

Utilizando (1) la desigualdad dentro de las llaves $p \cdot x \leq W(p, \theta_{i1}, \theta_{i2}, \omega^i)$, indica que la restricción presupuestaria esta conformada, justo como su nombre lo indica, por aquellas cestas de consumo que entran dentro del presupuesto del consumidor, es decir, por aquellas combinaciones de ambos bienes cuyo valor no rebasa el ingreso total del consumidor $i = 1,2$. Para simplificar notación en lugar de $W_i(p, \theta_{i1}, \theta_{i2}, \omega^i)$ se escribirá simplemente $W_i(p)$.

El problema de cada consumidor es el determinar la cesta, dentro de su presupuesto, que le dé la mayor utilidad o satisfacción posible, por lo que este problema puede ser escrito como

$$máx\{U_i(x_1, x_2)\}\ s.a.\ p_1x_1 + p_2x_2 \leq W_i(p) \qquad (3)$$

Al igual que en el caso del problema de maximización de beneficios de las firmas, el vector que resuelve este problema para cada uno de los consumidores está en función de los precios (y en este caso del ingreso), por lo que para denotar al vector que resuelve el problema de maximización (3) para el consumidor i, se fija la notación $x^i(p, W_i(p)) = \left(x_1^i(p, W_i(p)), x_2^i(p, W_i(p))\right) \in \mathbb{R}_+^2$ a $x^i(p, W_i(p))$ se le denomina ***demanda del consumidor*** i.

V. Equilibrio Walrasiano y la Función Exceso de Demanda

Una noción clave en el estudio de los mercados a nivel económico es la de equilibrio, en términos simples, un equilibrio de mercado se logra cuando se determina un precio para el cual la cantidad ofertada de bienes o servicios iguala a la cantidad demanda de los mismos, cuando esto se consigue se dice que los mercados se vacían.

La idea del equilibrio puede ser trasladada al modelo descrito al considerar la denominada ***función exceso de demanda*** $z: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}^2$, la cual se define sobre el espacio de precios $\mathbb{R}_+^2$ como sigue:

$$z(p) = \left(x^1(p, W_1(p)) - \omega^1\right) + \left(x^2(p, W_2(p)) - \omega^2\right) - \left(y^1(p) + y^2(p)\right)$$

Donde $x^i(p, W_i(p))$ es el vector de demanda del consumidor $i = 1,2$, definido a partir de (3) y $y^j(p)$ es el vector de oferta de la firma $j = 1,2$, el cual está definido a través de (2), y ω^1 y ω^2 son, respectivamente, las dotaciones iniciales del consumidor 1 y 2.

O explícitamente

$$z(p) = (z_1(p), z_2(p)) =$$
$$(x_1^1(p, W_1(p)) - \omega_1^1 + x_1^2(p, W_2(p)) - \omega_1^2 - y_1^2(p) + y_1^1(p),$$
$$x_2^1(p, W_1(p)) - \omega_2^1 + x_2^2(p, W_2(p)) - \omega_2^2 + y_2^1(p) - y_2^2(p))$$

La función exceso de demanda compara las cantidades demandadas por los consumidores, junto con lo producido, con las cantidades existentes y la demanda de insumos para producir de un mismo bien. Los ceros o raíces de esta función corresponden con los equilibrios de la economía. Para ser más formales se tiene la siguiente definición.

Definición 2 (Equilibrio Walrasiano) Se dice que $p^* \in \mathbb{R}_+^2$ es un precio de equilibrio o equilibrio Walrasiano para la economía $\mathcal{E}$ si $z(p^*) = 0$.

Es importante hacer algunos señalamientos sobre el equilibrio Walrasiano. Entendiendo la demanda como la cantidad de bien que se está dispuesto a adquirir para un cierto nivel de precios y la oferta como la como la cantidad que se está dispuesto a ofrecer en el mercado a este mismo nivel de precios, entonces la noción de equilibrio Walrasiano es justamente la misma que la noción de equilibrio económico, pues $z(p^*) = 0$ puede ser reescrita en términos de oferta y demanda como sigue: si p^* es un equilibrio Walrasiano, entonces $z(p^*) = 0$ es equivalente a

$$x_1^1(p, W_1(p)) + x_1^2(p, W_2(p)) + y_1^2(p) = \omega_1^1 + \omega_1^2 + y_1^1(p)$$
$$x_2^1(p, W_1(p)) + x_2^2(p, W_2(p)) + y_2^2(p) = \omega_2^1 + \omega_2^2 + y_2^1(p)$$

Ya que $x_1^1(p, W_1(p))$ y $x_1^2(p, W_2(p))$ son las cantidades óptimas de bien 1 demandadas por los consumidores 1 y 2 respectivamente, mientras que $y_1^2(p)$ es la cantidad óptima de insumo 1 que requiere la firma 2 para poder producir, análogamente para $x_2^1(p, W_1(p))$, $x_2^2(p, W_2(p))$ e $y_2^2(p)$, entonces el lado izquierdo de ambas ecuaciones representa la demanda agregada de mercado, mientras que el lado izquierdo corresponde con la oferta pues ω_1^1, ω_1^2 son las cantidades del bien 1 de las que disponen los consumidores y que pueden ofertar en el mercado, mientras que $y_1^1(p)$ es la cantidad de bien 1 producida y ofertada por la firma 1, de la misma forma se puede interpretar a ω_2^1, ω_2^2 e $y_2^1(p)$, por lo que el lado derecho de cada una de las ecuaciones representa la oferta agregada de mercado del bien 1 y bien 2 respectivamente. Por lo que se puede concluir que la condición $z(p^*) = 0$ es equivalente decir que para el precio p^* la demanda y la oferta agregadas en cada uno de los mercados se igualan.

Proposición 1 (Propiedades de la función exceso de demanda) $z: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}^2$ satisface:

1. ***Ley de Walras:*** $p \cdot z(p) = 0$ para todo $p \in \mathbb{R}_+^2$.
2. ***Homogeneidad de grado 0:*** $z(\alpha p) = z(p)$ para todo $\alpha > 0$.

La demostración de esta proposición puede ser encontrada en (Mas-Colell *et al.*, 1995) y (Mundell, 1965) por ejemplo. La homogeneidad de grado 0 dice aumentar o disminuir el precio de los bienes en una misma cuantía no modifica la demanda y oferta de estos. La ley de Walras por su parte permite concluir que para cualquier sistema de precios $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_+^2$ se tiene que $p_1z_1(p) = -p_2z_2(p)$, por lo que se puede concluir que si $p_1z_1(p) = 0$, entonces necesariamente $-p_2z_2(p) = 0$, más aún si los precios son estrictamente mayores que 0 ($p_1 > 0$ y $p_2 > 0$), entonces la condición $p_1z_1(p) = 0$, implica que $z_1(p) = 0$ y $z_2(p) = 0$, por lo que la ley de Walras permite analizar solo uno de los 2 mercados para poder determinar los equilibrios Walrasianos de la economía, si se vacía el primer mercado en automático lo hará el segundo y viceversa, esto es consecuencia de considerar una economía cerrada y de los problemas de maximización (2) y (3). Una vez más, aunque en la actualidad la mayoría de las economías mundiales son abiertas, la realidad es que la economía mundial (de forma global) es una economía cerrada donde todas las partes de esta se comunican entre sí de forma directa o indirecta, con el creciente uso del internet y la aparición del *e-commerce* el comercio entre regiones y zonas del mundo que antes parecían inimaginables se ha hecho posible.

Remark 1: Una vez que se ha descrito el modelo de economía con producción a detalle, una observación sobre el aporte del modelo descrito es necesaria, dado que las herramientas utilizadas en la descripción del modelo solo involucran el uso de conceptos básicos de teoría de conjuntos (definición de conjunto y de elementos de un conjunto), del cálculo diferencial (definición de función, dominio y rango, notación de intervalo, problemas de optimización) y álgebra lineal (notación de producto punto), se considera que este modelo puede ser estudiando y analizado por estudiante de primeros semestres de licenciatura que hayan o estén cursando este tipo de materias. Además fijando los parámetros pertinentes del modelo y las funciones que lo describen estos estudiantes podrían construir ejemplos que simulen situaciones reales de interés como podrían ser el cómo afecta el cambio en los gustos de los consumidores o en tecnología de producción a los precios de equilibrio en una economía, o inclusive modelar la forma en que las empresas diversifican en los mercados de una economía a lo largo del tiempo, este último punto se discutirá en las siguientes secciones, mientras que para los dos primeros se sugiere la revisión de los trabajos presentados por (Accinelli e*t al.,* 2023a) y (Accinelli e*t al.,* 2023b).

VI. Modelo de Diversificación

Los modelos de equilibrio general como el descrito en las secciones previas son de gran utilidad al analizar situaciones de reales de interés como lo son los cambios en los precios y sus repercusiones sobre la economía, los cambios en los procesos productivos y su repercusión sobre los precios de equilibrio y el cómo afectan los gustos de los consumidores a la demanda de mercado y en consecuencia al equilibrio de mercado. Sin embargo, la mayoría de las variantes propuestas a este modelo resultan ser modelos estáticos, en el sentido que se realizan para analizar una situación determinada en un momento del tiempo, sin tener en cuenta el futuro o el cómo el pasado afecta al presente de la economía, en este rubro trabajos recientes como los presentados en (Accinelli *et al.*, 2016), (An *et al.*, 2023), (Naimzada *et al.*, 2018) entre otros, han permitido generalizar estos modelos, permitiendo al modelo y a la economía evolucionar a través del tiempo.

Por otro lado, en (Accinelli *et al.*, 2021) consideran a la competencia entre firmas como un motor que mueve a la economía, este tiene relevancia en la realidad, pues el permitir la entrada de empresas en un mismo mercado genera competencia, lo que lleva a ofrecer productos de mejor calidad o con mejores características, así como a fijar precios más accesibles para los consumidores.

En el modelo propuesto en (Accinelli *et al.*, 2016) se divide a la economía en sectores o ramas de producción caracterizadas por la tecnología que se utiliza para producir, y se asume que las firmas, representadas por un administrador, en búsqueda de mayores retornos para su inversión se instalan en cada periodo en la rama de producción que mayores beneficios les ofrezcan. Si bien el modelo es bastante real, deja de lado el hecho de que una misma empresa puede realizar cambios internos en sus decisiones de producción destinando mayores recursos a diferentes segmentos en búsqueda de entrar en diferentes mercados relacionados, esto se conoce como diversificación.

A grandes rasgos existen 4 tipos de diversificación (ver (Huerta *et al.*, 2004), (Puente *et al.*, 2016) y (Garcia e*t al.*, 2017)) : i) la ***diversificación horizontal*** la cual ocurre cuando una firma lanza al mercado un producto vinculado a su actividad principal, ii) ***diversificación no relacionada o conglomerada*** en la cual las nuevas actividades de la empresa no guardan relación con el modelo de trabajo de la empresa, iii) ***diversificación vertical***, esta diversificación ocurre cuando una firma produce aquellos bienes que solía comprar a otras firmas, iv) ***diversificación concéntrica*** la cual se da cuando se integran nuevos productos o servicios a una línea ya existente, ejemplos de este tipo de diversificación ocurren cuando una empresa decide lanzar al mercado variantes de uno de sus productos ya establecidos (versiones tradicionales, light, cero azúcar, sin sal, sin saborizantes artificiales, gluten free, etc)**.**

Sobre la diversificación concéntrica es posible realizar un modelo utilizando el concepto de economía con producción de propiedad privada (definición 1), para este fin es necesario reinterpretar el sector productivo del modelo de economía e introducir un nuevo parámetro.

En esta parte se asumirá que las 2 empresas pueden producir utilizando las tecnologías disponibles, el cual es el caso de firmas que diversifican, cuando los procesos productivos y mercados a los que buscan ingresar son diferentes (diversificación conglomerada) las tecnologías disponibles para producir podrían ser diferentes entre sí, mientras que en el caso que los mercados en los que las empresas buscan participar sean similares y/o los bienes que se busca producir solo varían en determinadas características finales (diversificación concéntrica) las tecnologías podrían ser similares o incluso iguales utilizando solo diferentes insumos para dar el termino final al producto. En ambas situaciones los encargados de las decisiones de producción (qué producir y para quién producir) deberán asignar recursos (materiales, infraestructura, personal, tiempo, etc.) para desarrollar su producción.

Para el modelo de diversificación que se propone en este trabajo, entendiendo el modelo como una simplificación de la realidad, se asume que cada una de las 2 firmas tiene acceso a ambas tecnologías y se considera como una unidad los recursos que las empresas deben asignar para utilizar ambas tecnologías.

No se asume que los insumos necesarios para producir se modifican, si no que la infraestructura o recursos materiales o de personal deben dividirse para poder utilizar las tecnologías disponibles, en este sentido los administradores de cada firma $j = 1,2$, asignan porcentajes de recursos α_{j1} y α_{j2} ($\alpha_{j1}, \alpha_{j2} \in [0,1]$ tales que $\alpha_{j1} + \alpha_{j2} = 1$, distribuyen todos sus recursos en el uso de ambas tecnologías) para el uso de las tecnologías o procesos de producción descritos por las funciones de producción g_1 y g_2, a cada elección de α_{j1} y α_{j2}, $j = 1{,}2$, se le denomina ***plan de diversificación de la firma*** $j = 1{,}2$. Cuando la firma $j = 1{,}2$, produce utilizando la tecnología g_1 se dice que la firma $j = 1{,}2$, produce en el sector o mercado 1, mientras que si utiliza la tecnología g_2 se dice que produce en el sector o mercado 2. Dado que la firmas tiene acceso a ambas tecnologías, entonces cada firma tiene 2 problemas de maximización dados por:

$$máx\{p_1(\alpha_{j1}g_1(y_2)) - p_2y_2\} \quad (4)$$
$$máx\{p_2(\alpha_{j2}g_2(y_1)) - p_1y_1\} \quad (5)$$

Cada problema corresponde a cada uno de los procesos productivos. En este contexto, se debe suponer que el nivel de producción es proporcional a los recursos destinados a cada sector, en este caso la oferta de firma $j = 1, 2$ en el mercado 1 está dada por $y^{j,1}(p,\alpha_{j,1}) = \left(y_1^{j,1}(p,\alpha_{j,1}), -y_2^{j,1}(p,\alpha_{j,1})\right)$, mientras que la oferta de esa firma en el mercado 2 está dada por $y^{j,2}(p,\alpha_{j,2}) = \left(-y_1^{j,2}(p,\alpha_{j,2}), y_2^{j,2}(p,\alpha_{j,2})\right)$, donde $y^{j,1}(p)$ y $y^{j,2}(p)$ resuelven los problemas (4) y (5) respectivamente. Note que en este caso la oferta de cada firma depende no solo de los precios, sino que además de las asignaciones de recursos $\alpha_{j,1}$ y $\alpha_{j,2}$. Por lo que en este caso los beneficios totales de cada firma serán los beneficios que obtiene cada firma por producir en cada uno de los sectores, obteniendo así que el beneficio total de la firma $j = 1{,}2$ está dado por

$$\pi_j(p,\alpha_{j,1},\alpha_{j,2}) = p \cdot \left(y^{j,1}(p,\alpha_{j,1}) + y^{j,2}(p,\alpha_{j,2})\right), j = 1{,}2$$

De la misma manera, ya que en el modelo los consumidores tienen participación en las firmas, entonces el salario de los consumidores se modifica en la parte correspondiente a los beneficios de las firmas quedando como sigue:

$$\begin{aligned} I_i(p,\theta_{i1},\theta_{i2},\omega^i) = p \cdot \omega^i + \theta_{i1}\pi_1(p,\alpha_{j,1},\alpha_{j,2}) \\ +\ \theta_{i2}\pi_2(p,\alpha_{j,1},\alpha_{j,2}), i = 1{,}2 \end{aligned}$$

Por lo que la demanda de los consumidores debe sujetarse ahora a la nueva restricción definida a partir del nuevo ingreso $I_i(p,\theta_{i1},\theta_{i2},\omega^i)$, sustituyendo en (3) $W_i(p,\theta_{i1},\theta_{i2},\omega^i)$ por $I_i(p,\theta_{i1},\theta_{i2},\omega^i)$, la demanda del consumidor $i = 1{,}2$, toma la forma $x^i(p,I_i(p)) = \left(x_1^i(p,I_i(p)), x_2^i(p,I_i(p))\right) \in \mathbb{R}_+^2$ (se modifica a la nueva restricción definida por el nuevo ingreso), por lo que función exceso de demanda toma la forma

$$\begin{aligned} z(p,\alpha) &= (z_1(p,\alpha), z_2(p,\alpha)) = \\ &(x_1^1(p,I_1(p)) + x_1^2(p,I_2(p)) + y_1^{1,1}(p,\alpha_{1,1}) + y_1^{2,1}(p,\alpha_{2,1}) \\ &\quad - y_1^{1,2}(p,\alpha_{1,2}) - y_1^{2,2}(p,\alpha_{2,2}) - \omega_1^1 - \omega_1^2, \\ &x_2^1(p,I_1(p)) + x_2^2(p,I_2(p)) - \omega_2^2 + y_2^{1,2}(p,\alpha_{1,2}) \\ &\quad + y_2^{2,2}(p,\alpha_{2,2}) - y_2^{1,1}(p,\alpha_{1,1}) - y_2^{2,1}(p,\alpha_{2,1})) \end{aligned}$$

Donde $\alpha = (\alpha_{1,1},\alpha_{1,2},\alpha_{2,1},\alpha_{2,2})$ es el vector de distribuciones de las firmas. Note que en este caso la función exceso de demanda depende tanto del nivel de precios como de los planes de diversificación de las firmas, por lo que es de esperar que los precios de equilibrio se modifiquen en función de $\alpha = (\alpha_{1,1},\alpha_{1,2},\alpha_{2,1},\alpha_{2,2})$, es decir, a medida que las firmas modifican sus decisiones de diversificación asignando más o menos recursos a un sector productivo o a otro, los precios de equilibrio se modificarán en función de los cambios realizados en las firmas.

Bajo condiciones bastante generales como las enunciadas en el teorema de la función implícita (ver por ejemplo (Accinelli *et al.*, 2021) y (Krantz *et al.,* 2002) para aplicaciones en la economía), se puede garantizar que localmente cada precio de equilibrio $p \in \mathbb{R}_{++}^2$ es en realidad una función $p(\cdot)$ de $\alpha = (\alpha_{1,1},\alpha_{1,2},\alpha_{2,1},\alpha_{2,2})$, esto es, $p(\alpha) = p(\alpha_{1,1},\alpha_{1,2},\alpha_{2,1},\alpha_{2,2}) \in \mathbb{R}_{++}^2$, lo que demuestra que las decisiones de diversificación modifican el equilibrio de la economía.

VII. Decisiones de Diversificación

Una estrategia exitosa será aquella que permita obtener mayores beneficios (Garcia *et al*., 2018). Por lo tanto, es de esperar que los directivos de las empresas busquen con el tiempo replicar las estrategias más exitosas. En este sentido las decisiones de mantener, aumentar o disminuir los recursos designados a cada sector productivo en cada periodo de decisión dependerán de los beneficios adquiridos por su participación en cada sector productivo.

Para poder llevar a cabo este análisis utilizando el modelo propuesto, la comparación entre beneficios deberá realizarse en el equilibrio de mercado correspondiente, pues es justamente en este dónde hay claridad sobre la dependencia del equilibrio en los parámetros de diversificación $\alpha = (\alpha_{1,1},\alpha_{1,2},\alpha_{2,1},\alpha_{2,2})$ (ver la sección anterior). Entonces, un criterio para determinar el rumbo que debe tomar los planes de diversificación es el siguiente:

Si $\alpha = (\alpha_{1,1},\alpha_{1,2},\alpha_{2,1},\alpha_{2,2})$ es el plan de diversificación inicial de la firma, entonces

I. Si $\pi_1(p,\alpha_{j,1},\alpha_{j,2}) > \pi_2(p,\alpha_{j,1},\alpha_{j,2})$. La firma $j = 1{,}2$, aumentará los recursos destinados al mercado 1 ($\alpha_{j,1}$ aumentará), disminuyendo los asignados al mercado 2 ($\alpha_{j,2}$ decrecerá manteniendo $\alpha_{j,1} + \alpha_{j,2} = 1$).
II. Si $\pi_1(p,\alpha_{j,1},\alpha_{j,2}) = \pi_2(p,\alpha_{j,1},\alpha_{j,2})$. La firma $j = 1{,}2$, mantendrá las decisiones de diversificación previamente tomadas.
III. Por último, si $\pi_1(p,\alpha_{j,1},\alpha_{j,2}) < \pi_2(p,\alpha_{j,1},\alpha_{j,2})$. La firma $j = 1{,}2$, aumentará los recursos destinados al mercado 2 ($\alpha_{j,2}$ aumentará), disminuyendo los recursos asignados al mercado 1 ($\alpha_{j,2}$ decrecerá manteniendo $\alpha_{j,1} + \alpha_{j,2} = 1$).

VIII. CONCLUSIÓN

En las primeras secciones de este trabajo se ha mostrado una aplicación de las matemáticas al modelo económico, la cual involucra el uso de herramientas básicas de cálculo diferencia, álgebra matricial, teoría de conjuntos, así como conceptos clave de la economía. La naturaleza de las herramientas utilizadas hace que el modelo sea fácil de estudiar y analizar por estudiantes de primeros semestres de licenciatura, requiriendo como mayor fortaleza un dominio del cálculo diferencial para resolver los problemas de maximización planteados en este trabajo.

Por otro lado, en la sección VI del trabajo se ha descrito una posible aplicación de este tipo de modelos a problemas de diversificación de mercado, lo que contribuye a expandir la literatura existente sobre las aplicaciones del formalismo matemático a modelado de economías con producción de propiedad privada.

En la sección VII se sientan las bases para el desarrollo de una línea de investigación a futuro, pues la toma de decisiones sobre aumentar la producción en un mercado u otro a lo largo del tiempo se puede realizar mediante el uso de sistemas dinámicos, en particular mediante el uso de la llamada dinámica del replicador, sin embargo el empleo técnicas de este tipo va más allá del objetivo primordial de este trabajo, por lo que se plantea como parte de un trabajo futuro enfocado a promover la investigación básica y colaboración entre estudiantes de últimos semestres de licenciatura e ingeniería.

AGRADECIMIENTOS

Humberto Muñiz Agradece a CONAHCyT por la beca de estancia posdoctoral 266091 otorgada, así como a la Facultad de Economía de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí por las facilidades brindadas para la relación de la estancia.

REFERENCIAS

Accinelli, E., & Covarrubias, E. (2016). Evolution and jump in a Walrasian framework. *Journal of Dynamics and Games*, 3, 279-301.

Accinelli, E., García, A., & Ortigoza, I. (2023a). Technology Evolution and its Repercussions on the Social Welfare in a General Equilibrium Model. *Available at SSRN 4534392*.

Accinelli, E., García, A., Ortigoza, I., & Muñiz, H. (2023b). Tastes, Singular and Regular Economies: The Negishi Point of Vew and the Gaussian Curvature. *Available at SSRN 4343065*.

Accinelli, E., & Muñiz, H. (2021). Evolution in a general equilibrium framework. *Journal of Mathematical Economics*, *96*, 102513.

An, K., Wang, C., & Cai, W. (2023). Low-carbon technology diffusion and economic growth of China: an evolutionary general equilibrium framework. *Structural Change and Economic Dynamics*, *65*, 253-263.

Cowles, M. (2005). *Statistics in psychology: An historical perspective*. Psychology Press.

Enríquez Pérez, I. (2016). Las teorías del crecimiento económico: notas críticas para incursionar en un debate inconcluso. *Revista latinoamericana de desarrollo económico*, (25), 73-125.

Garcia Guiliany, J. E., Duran, S. E., Cardeño Pórtela, E., Prieto Pulido, R., Garcia Cali, E., & Paz Marcano, A. (2017). Proceso de planificación estratégica: Etapas ejecutadas en pequeñas y medianas empresas para optimizar la competitividad.

Huerta, P., Martínez, P., & Navas, J. E. (2004). Cómo medir la diversificación corporativa: Una aplicación a las empresas industriales españolas. *Theoria*, 13(1), 59-68.

Krantz, S. G., & Parks, H. R. (2002). The implicit function theorem: history, theory, and applications. Springer Science & Business Media.

Macheso, P. S., & Thulu, F. G. D. (2023, April). Roles of Optical Fiber Sensors in the Internet of Things: Applications and Challenges. In *International Conference on Soft Computing for Security Applications* (pp. 923-933). Singapore: Springer Nature Singapore.

Maldonado, C., & Merino–Negrete, N. (2024). Irreversibility indices as discriminators of heart conditions from electrocardiographic signals. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, *637*, 129584.

Mansilla San Emeterio, P. (2014). Hipertermia láser: Aplicación al tratamiento de tejidos tumorales esofágicos.

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., & Green, J. R. (1995). Microeconomic theory (Vol. 1). New York: Oxford university press.

Mundell, R. A. (1965). The homogeneity postulate and the laws of comparative statics in the walrasian and metzleric systems. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 349-356.

Naimzada, A., & Pireddu, M. (2018). Research Article Complex Dynamics in an Evolutionary General Equilibrium Model.

Olkun, S., Şahin, Ö., Akkurt, Z., Dikkartin, F. T., & Gülbağcı, H. (2010). Modelleme yoluyla problem çözme ve genelleme: İlköğretim öğrencileriyle bir çalışma. *Eğitim ve Bilim*, *34*(151).

Özdemir, E., & Üzel, D. (2013). A case study on teacher instructional practices in mathematical modeling. *The Online Journal of New Horizons in Education*, *3*(1), 1-14.

Puente-Riofrío, M., & Andrade-Domínguez, F. (2016). Relación entre la diversificación de productos y la rentabilidad empresarial. *Revista Ciencia UNEMI*, 9(18), 73-80.

Villegas Zamora, D. A. (2019). La importancia de la estadística aplicada para la toma de decisiones en Marketing. *Revista Investigación y Negocios*, *12*(20), 31-44.