

# Generación paramétrica de trayectorias personalizables para rehabilitación del tobillo mediante curvas de Lissajous

C.H. Guzmán-Valdivia<sup>1,\*</sup> y A. Blanco-Ortega<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidad Politécnica de Aguascalientes, Departamento de Ciencias Básicas, Calle Paseo San Gerardo No. 207, Fracc. San Gerardo C.P.20342 Aguascalientes, Aguascalientes, México, cesar.guzman@upa.edu.mx

<sup>2</sup> TECNM/ Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (Cenidet), Departamento de Ingeniería Mecánica, Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira C.P.62490 Cuernavaca, Morelos, México, andres.bo@cenidet.tecnm.mx

## Resumen

La rehabilitación robótica del tobillo requiere trayectorias de movimiento seguras, suaves y adaptables que permitan ajustarse a diferentes etapas terapéuticas sin modificar la arquitectura mecánica del dispositivo. Sin embargo, muchos sistemas actuales emplean trayectorias simples y poco flexibles, lo que limita la personalización del tratamiento. En este trabajo se propone una estrategia matemática para la generación paramétrica de trayectorias terapéuticas del tobillo basada en curvas de Lissajous, orientada a su implementación en robots de rehabilitación. El enfoque modela movimientos bidimensionales mediante funciones sinusoidales acopladas, permitiendo controlar de forma independiente amplitud, frecuencia y fase para representar ejercicios clínicos como círculos, patrones en forma de "8" y trayectorias progresivas. Los resultados de simulación muestran que las trayectorias generadas son continuas, suaves y altamente versátiles, capaces de adaptarse a distintos rangos articulares, incorporar pausas controladas en posiciones extremas y aumentar progresivamente la complejidad del movimiento. Estas características permiten reproducir y ampliar protocolos terapéuticos tradicionales mediante una formulación matemática simple y reproducible. El estudio se desarrolla a nivel de simulación matemática y validación gráfica, lo que permite establecer un marco general, flexible y reproducible para la generación de trayectorias terapéuticas personalizables en sistemas robóticos de rehabilitación del tobillo, con potencial aplicación en diversas arquitecturas y protocolos de rehabilitación.

**Palabras clave**— Curvas de Lissajous, generación de trayectorias, rehabilitación robótica del tobillo, trayectorias paramétricas.

## Parametric Generation of Therapeutic Trajectories for Robotic Ankle Rehabilitation Based on Lissajous Curves

### Abstract

Robotic ankle rehabilitation requires safe, smooth, and adaptable motion trajectories that can be adjusted to different therapy stages without modifying the mechanical architecture of the device. However, many existing systems rely on simple or fixed trajectories, which limits the personalization and progression of rehabilitation protocols. This paper proposes a parametric mathematical strategy for generating therapeutic ankle trajectories based on Lissajous curves, intended for implementation in robotic rehabilitation systems. The approach models bidimensional ankle movements using coupled sinusoidal functions, enabling independent control of amplitude, frequency, and phase to represent clinically relevant exercises such as circular motions, figure-eight patterns, and progressive trajectories. Simulation results demonstrate that the generated trajectories are continuous, smooth, and highly versatile, allowing adaptation to different joint ranges, incorporation of controlled pauses at extreme positions, and gradual increases in movement complexity within a single session. These characteristics enable the reproduction and extension of conventional therapeutic exercises through a simple and reproducible mathematical formulation. The study is conducted at the level of mathematical simulation and graphical validation, which enables the establishment of a general, flexible, and reproducible framework for the generation of customizable therapeutic trajectories in robotic ankle rehabilitation systems, with potential application across different robotic architectures and rehabilitation protocols.

**Keywords**— Lissajous curves, parametric trajectories, robotic ankle rehabilitation, trajectory generation.

### I. INTRODUCCIÓN

La articulación del tobillo desempeña un papel fundamental en la estabilidad postural, el equilibrio dinámico y la locomoción humana, ya que actúa como un punto clave de transmisión de fuerzas entre el cuerpo y el suelo durante la marcha y otras actividades funcionales. Al mismo tiempo, se trata de una de las articulaciones más susceptibles a lesiones tanto en el ámbito deportivo como en la vida cotidiana. Los

esguinces de tobillo representan una proporción significativa de las lesiones musculoesqueléticas, con tasas de recurrencia elevadas que pueden superar el 30 %, lo que frecuentemente deriva en inestabilidad crónica, dolor persistente y deterioro funcional a largo plazo [1–3].

Además de las lesiones ortopédicas, diversas patologías neurológicas, como el ictus, producen alteraciones motoras que afectan directamente al control del tobillo. Entre estas se incluyen el denominado pie caído, la disminución del control

en la dorsiflexión y alteraciones propioceptivas, las cuales repercuten de forma negativa en la eficiencia de la marcha, el equilibrio y la autonomía del paciente [4]. En conjunto, estos factores evidencian la necesidad de estrategias de rehabilitación eficaces, seguras y progresivas, orientadas no solo a recuperar el rango de movimiento articular, sino también a restablecer la fuerza muscular y la coordinación neuromuscular necesarias para una locomoción funcional.

En las últimas décadas, la robótica de rehabilitación se ha consolidado como una alternativa y complemento a la terapia convencional, al ofrecer la posibilidad de realizar entrenamientos intensivos, repetibles y cuantitativamente controlados, con menor dependencia de la intervención manual del terapeuta [5]. Estas características resultan especialmente relevantes en procesos de rehabilitación prolongados, donde la consistencia del estímulo terapéutico es un factor clave para la recuperación funcional.

En el caso particular del tobillo, se han desarrollado diversos sistemas robóticos que pueden clasificarse de manera general en plataformas robóticas y exoesqueletos portables. Las plataformas paralelas permiten movilizar el pie en múltiples ejes con alta rigidez estructural y precisión cinemática, lo que las hace adecuadas para ejercicios de movilidad articular y control motor fino [6–8]. Por otro lado, los exoesqueletos portables suelen priorizar la asistencia durante la marcha y presentan una arquitectura más ligera, aunque comúnmente cuentan con un número limitado de grados de libertad, en muchos casos restringidos a la flexión plantar y dorsiflexión [5,9]. No obstante, independientemente de la arquitectura mecánica empleada, la efectividad clínica de los sistemas de rehabilitación robótica del tobillo depende en gran medida de las trayectorias de movimiento utilizadas durante la terapia, ya que estas determinan el tipo de estímulo mecánico y neuromuscular aplicado al paciente.

Los primeros sistemas de rehabilitación robótica del tobillo se basaron principalmente en el uso de trayectorias predefinidas bajo esquemas de control en posición, en los que el dispositivo guiaba de manera pasiva el movimiento del pie del paciente a lo largo de un patrón establecido [7]. Este enfoque resulta adecuado en fases tempranas de la rehabilitación o en casos de afectación severa, donde el paciente presenta una capacidad limitada para generar movimiento voluntario. Sin embargo, la naturaleza pasiva de estas estrategias ofrece una estimulación neuromuscular reducida y puede limitar el reaprendizaje motor.

Con el objetivo de incrementar la participación activa del paciente, se introdujeron posteriormente estrategias de control por admisión e impedancia, las cuales permiten desviaciones controladas respecto a una trayectoria de referencia en función de la interacción usuario–robot [9,10]. Estos enfoques mejoran la seguridad y la adaptabilidad del entrenamiento, al ajustar el nivel de asistencia según la capacidad del paciente. A pesar de ello, en la práctica clínica muchos sistemas continúan empleando patrones de movimiento relativamente simples, tales como desplazamientos uniplanares o trayectorias circulares básicas. En consecuencia, la exploración de trayectorias periódicas multidimensionales que integren de forma coordinada los movimientos de flexión–extensión e

inversión–eversión del tobillo sigue siendo limitada, a pesar de su potencial para mejorar el control motor y la propiocepción.

A pesar de los avances en diseño mecánico y estrategias de control, no existe un consenso claro sobre cuáles trayectorias son óptimas para la rehabilitación del tobillo. Muchos dispositivos siguen utilizando patrones rígidos y poco flexibles que no explotan completamente la naturaleza coordinada de los movimientos articulares del tobillo. Algunos estudios han propuesto la generación de trayectorias basadas en modelos biomecánicos o musculo-esqueléticos [11,12]; sin embargo, estos enfoques suelen ser específicos para un sistema determinado y requieren procesos de modelado complejos, lo que limita su generalización. Esto pone de manifiesto la necesidad de un marco de generación de trayectorias que sea general, flexible y fácilmente ajustable, capaz de adaptarse a distintas etapas de la rehabilitación sin incrementar la complejidad del sistema.

En otros ámbitos de la ingeniería, la generación de trayectorias periódicas complejas se ha abordado exitosamente mediante el uso de curvas de Lissajous, las cuales resultan de la combinación de oscilaciones armónicas en ejes ortogonales. Al ajustar parámetros como amplitud, frecuencia y fase, estas curvas permiten generar patrones suaves y cerrados, tales como elipses, trayectorias en forma de “8” o figuras con múltiples lóbulos. Estas propiedades han sido aprovechadas en aplicaciones que van desde la microscopía de escaneo de alta velocidad hasta la planificación de trayectorias para sistemas multiagente [13–15]. Adicionalmente, en el ámbito de la biomecánica, las curvas de Lissajous se han empleado para describir características cíclicas del movimiento humano, lo que sugiere una compatibilidad natural con patrones de movimiento fisiológicos [14].

En este artículo se propone un enfoque paramétrico para la generación de trayectorias terapéuticas del tobillo basado en curvas de Lissajous, orientado a su aplicación en sistemas robóticos de rehabilitación. La propuesta permite diseñar de manera sistemática trayectorias con complejidad ajustable, control del rango articular y características temporales personalizables, posibilitando la reproducción y extensión de ejercicios de rehabilitación convencionales mediante una formulación matemática simple. A diferencia de enfoques dependientes de modelos biomecánicos específicos, el método planteado es general e independiente de la arquitectura robótica, lo que facilita su implementación en una amplia variedad de sistemas de rehabilitación del tobillo.

## II. METODOLOGÍA

La metodología propuesta se centra en el desarrollo de un marco matemático paramétrico para la generación de trayectorias terapéuticas del tobillo, orientado a su implementación en sistemas robóticos de rehabilitación. El enfoque considera la generación de movimientos bidimensionales coordinados que representan los principales grados de libertad funcionales de la articulación del tobillo, específicamente la flexión–extensión y la inversión–eversión.

El objetivo de esta metodología es proporcionar una herramienta general y flexible que permita diseñar trayectorias

suaves, continuas y personalizables, capaces de adaptarse a distintos rangos articulares y etapas del proceso de rehabilitación, sin depender de un modelo biomecánico específico ni de la arquitectura particular del sistema robótico.

La articulación del tobillo permite movimientos esenciales para la locomoción, el equilibrio y la adaptación a superficies irregulares [16]. En el plano sagital se distinguen la dorsiflexión y la flexión plantar, responsables del movimiento del pie hacia arriba y hacia abajo, respectivamente. Por su parte, en el plano frontal se producen los movimientos de inversión y eversion, los cuales desempeñan un papel clave en la estabilidad medio lateral del cuerpo (Fig. 1).

Desde el punto de vista funcional, la coordinación entre estos movimientos resulta fundamental durante actividades como la marcha y el mantenimiento del equilibrio. En consecuencia, la generación de trayectorias de rehabilitación que integren de manera simultánea ambos ejes de movimiento representa una alternativa más cercana a los patrones fisiológicos del tobillo que el uso de movimientos uniplanares aislados.



Fig. 1. Movimientos principales de la articulación del tobillo.

Para el diseño de trayectorias de rehabilitación del tobillo se empleó el enfoque matemático de las curvas de Lissajous, el cual permite representar movimientos bidimensionales mediante funciones paramétricas sinusoidales acopladas. La formulación general se expresa como:

$$x(t) = A \cdot \sin(at + \delta) \quad (1)$$

$$y(t) = B \cdot \sin(bt) \quad (2)$$

donde:  $A$  y  $B$  representan las amplitudes (en este caso asociadas a los rangos articulares de flexión-extensión e inversión-eversión),  $a$  y  $b$  las frecuencias angulares y  $\delta$  la fase relativa entre ambos movimientos.

Desde una perspectiva terapéutica, los parámetros de las ecuaciones (1) y (2) permiten un control directo sobre las características del movimiento generado. Las amplitudes determinan el rango articular explorado durante el ejercicio, mientras que las frecuencias influyen en la velocidad y repetitividad del movimiento. La fase relativa, por su parte, gobierna la coordinación entre ambos ejes, lo que permite generar patrones de movimiento con distintos niveles de complejidad, tales como trayectorias elípticas, circulares o en forma de “8”.

Esta parametrización facilita la adaptación del ejercicio a las capacidades del paciente, permitiendo ajustar de manera progresiva tanto el rango de movimiento como la coordinación interarticular, sin modificar la estructura matemática del modelo.

En una primera etapa, se exploraron distintas configuraciones de parámetros para ilustrar la capacidad de las

trayectorias Lissajous de generar patrones cerrados y estéticamente diferenciados.

Se consideraron tres ejemplos:

- a)  $\{A = B = 1, a: b = 3: 2, \delta = \pi/2\}$ ,
- b)  $\{A = 1, B = 2, a: b = 5: 4, \delta = \pi/3\}$ ,
- c)  $\{A = B = 1, a: b = 1: 2, \delta = 0\}$ .

En una segunda etapa, se adaptaron los parámetros para simular un ejercicio de tobillo en fisioterapia, donde el eje  $x$  corresponde a la flexión-extensión (rango aproximado  $\pm 20^\circ$ ) y el eje  $y$  a la inversión-eversión (rango aproximado  $\pm 10^\circ$ ). Esta configuración produce una trayectoria elíptica que reproduce los círculos de tobillo comúnmente empleados en rehabilitación.

Con el fin de reproducir protocolos terapéuticos más realistas, se implementaron pausas programadas en los extremos del rango, mediante la modificación de la función angular  $\theta(t)$  para mantener constantes los valores de  $x$  y  $y$  durante intervalos de 2 segundos. Las pausas en los extremos articulares se implementaron sustituyendo el avance lineal de la fase por una función por tramos  $\theta(t)$ :

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta_k & t \in [t_0, t_0 + T_{pausa}] \\ \theta_k + \frac{\Delta\theta}{2} \left( \frac{\pi(t - t_0 - T_{pausa})}{T_{mov}} \right) & t \in [t_0 + T_{pausa}, t_0 + T_{pausa} + T_{mov}] \end{cases} \quad (3)$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\theta(t) + \delta) \quad (4)$$

$$y(t) = B \cdot \sin(\theta(t)) \quad (5)$$

Se exploraron patrones avanzados con aplicaciones terapéuticas específicas. Se trazó un patrón en forma de “8”, útil para entrenar cambios de dirección y control fino del tobillo, y se diseñó un patrón progresivo en espiral, donde las amplitudes aumentan gradualmente a lo largo de cinco ciclos, simulando una terapia de movilidad con incremento progresivo del rango articular.

$$A(t) = A_0 + (A_f - A_0) \cdot s(t) \quad (6)$$

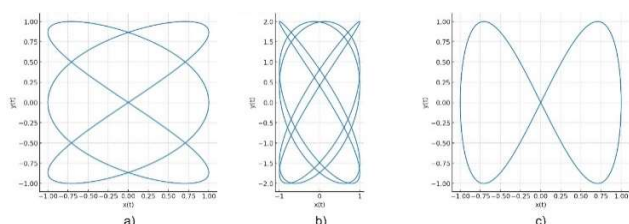
$$B(t) = B_0 + (B_f - B_0) \cdot s(t) \quad (7)$$

donde:  $s(t)$  es una función de progresión temporal adimensional, que parametriza el avance dentro de la sesión (por ejemplo, puede ser lineal o sigmoideal para progresiones más suaves).

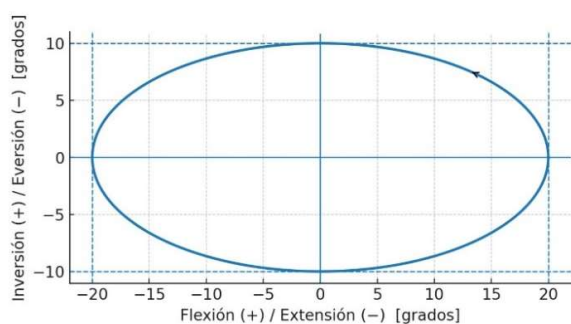
### III. RESULTADOS

Las simulaciones realizadas demostraron que las curvas de Lissajous permiten generar trayectorias de movimiento controladas y adaptables dentro de los rangos articulares del tobillo. La variación sistemática de los parámetros de amplitud, frecuencia y fase dio lugar a una amplia familia de trayectorias bidimensionales, confirmando la versatilidad del enfoque

propuesto. En particular, se observó que pequeños cambios en la fase relativa producen modificaciones significativas en la orientación y forma de la trayectoria, lo que resalta el potencial del modelo para ajustar el movimiento a diferentes necesidades terapéuticas. Las configuraciones iniciales de parámetros evidenciaron la capacidad del modelo para generar trayectorias con características geométricas diversas, que van desde patrones simétricos hasta trayectorias elongadas y complejas (Fig. 2). Estas simulaciones muestran que, mediante una formulación matemática simple, es posible obtener movimientos suaves y periódicos sin discontinuidades, lo cual resulta especialmente relevante en el contexto de la rehabilitación, donde la continuidad del movimiento es un criterio de seguridad fundamental. La posibilidad de modificar la geometría de la trayectoria sin alterar la estructura del modelo refuerza la flexibilidad del enfoque.



Cuando los parámetros del modelo se ajustaron a rangos articulares clínicamente realistas ( $\pm 20^\circ$  para flexión–extensión y  $\pm 10^\circ$  para inversión–eversión) la trayectoria resultante adoptó una forma elíptica, coherente con los ejercicios de movilidad comúnmente utilizados en fisioterapia del tobillo (Fig. 3). Este resultado es relevante, ya que demuestra que el enfoque propuesto puede adaptarse a las limitaciones biomecánicas de la articulación sin requerir modificaciones en el mecanismo físico del sistema robótico, bastando con una adecuada parametrización matemática. Asimismo, el movimiento generado se mantuvo continuo y suave a lo largo de todo el ciclo, reduciendo el riesgo de incomodidad o sobreesfuerzo en pacientes con movilidad reducida.



Los rangos articulares empleados en la trayectoria elíptica propuesta ( $\pm 20^\circ$  en flexión–extensión y  $\pm 10^\circ$  en inversión–eversión) son consistentes con los valores clínicamente establecidos para ejercicios de rehabilitación pasiva del tobillo. De acuerdo con la literatura especializada, los rangos de

movimiento típicos del tobillo durante rehabilitación robótica pasiva comprenden aproximadamente  $20^\circ$  para la dorsiflexión,  $40^\circ$  para la flexión plantar, y entre  $10^\circ$  y  $16^\circ$  para la eversión [8]. Sistemas robóticos de referencia como el Rutgers Ankle [7] y el ARBOT [9] operan dentro de rangos similares durante las fases iniciales de rehabilitación pasiva, donde la prioridad es recuperar la movilidad articular básica mediante trayectorias suaves y continuas. La trayectoria elíptica generada reproduce fielmente este tipo de ejercicio, al explorar de forma coordinada ambos ejes de movimiento dentro de límites biomecánicamente seguros.

La implementación de pausas controladas en los extremos del rango articular permitió reproducir protocolos terapéuticos frecuentemente empleados en la práctica clínica (Fig. 4). En este escenario, la trayectoria elíptica se complementó con intervalos de permanencia de dos segundos en posiciones de máxima dorsiflexión, flexión plantar, inversión y eversión. Este comportamiento favorece el estiramiento muscular sostenido y la recuperación de la elasticidad articular. La formulación mediante una función de fase por tramos garantizó transiciones suaves entre fases de movimiento y reposo, evitando picos abruptos de velocidad o aceleración que podrían resultar incómodos o inseguros para el paciente.

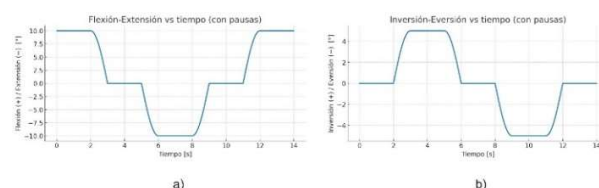


Fig. 4. Trayectoria elíptica con pausas de 2 s en los extremos articulares, empleando función de fase por tramos. Parámetros: A=20°, B=10°, a:b=1:1,  $\delta=\pi/2$ ,  $T_{\text{pausa}}=2$  s. a) flexión-extensión, b) inversión-eversión.

La incorporación de pausas controladas en los extremos del rango articular reproduce un protocolo ampliamente utilizado en fisioterapia clínica, en el que se mantienen posiciones de estiramiento sostenido durante intervalos de entre 2 y 30 segundos para favorecer la extensibilidad del tejido blando y la recuperación articular [16]. En sistemas robóticos como el ARBOT [9], la fase de ejercicio pasivo contempla explícitamente la parametrización de la velocidad, la amplitud y el número de repeticiones por parte del fisioterapeuta, lo que es consistente con el enfoque propuesto, donde dichos parámetros pueden ajustarse directamente mediante la formulación matemática sin modificar la arquitectura del sistema.

Se exploraron patrones de movimiento más complejos con potencial terapéutico específico, entre los cuales destaca la trayectoria en forma de “8” (Fig. 5). Este patrón, generado mediante relaciones de frecuencia adecuadas entre los ejes, introduce cambios periódicos de dirección y cruces por el centro de la trayectoria, lo que exige un mayor nivel de coordinación y control motor del tobillo. En comparación con trayectorias circulares simples, este tipo de movimiento incrementa la demanda propioceptiva y resulta particularmente adecuado para fases intermedias o avanzadas de la rehabilitación.

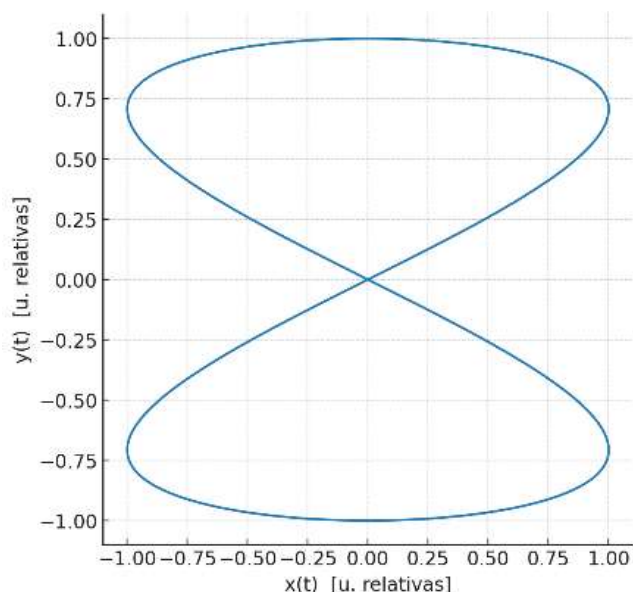


Fig. 5. Patrón en forma de '8' para entrenamiento de control fino y coordinación. Parámetros:  $A=B=20^\circ$ ,  $a:b=2:1$ ,  $\delta=\pi/2$ .

El patrón en forma de '8' introduce cambios periódicos de dirección y exige una mayor coordinación entre los ejes de flexión-extensión e inversión-eversión, lo que lo hace adecuado para fases intermedias o avanzadas de la rehabilitación. Este tipo de movimiento multidireccional es consistente con los principios del entrenamiento propioceptivo reportados en la literatura, donde se recomienda progresar desde ejercicios uniplanares hacia patrones que demanden mayor control neuromuscular [10]. A diferencia de la mayoría de los sistemas robóticos revisados, que emplean trayectorias circulares o uniplanares durante el entrenamiento propioceptivo [5,6], la formulación paramétrica propuesta permite generar este patrón complejo mediante un simple ajuste en la relación de frecuencias, sin requerir modificaciones en el sistema de control ni en la arquitectura robótica.

La trayectoria progresiva en forma de espiral permitió simular un incremento gradual del rango articular a lo largo de varios ciclos de movimiento (Fig. 6). En este caso, las amplitudes se incrementaron de manera continua desde valores reducidos hasta alcanzar el rango completo definido para el ejercicio. Este tipo de comportamiento es especialmente relevante en etapas iniciales de la rehabilitación, donde no se recomienda aplicar de forma inmediata el rango máximo disponible. El modelo propuesto permite así acompañar de manera segura y controlada la evolución del paciente dentro de una misma sesión terapéutica, optimizando el tiempo de tratamiento y reduciendo el riesgo de sobrecarga articular.

En conjunto, los resultados obtenidos muestran que las trayectorias basadas en curvas de Lissajous constituyen una herramienta eficaz para la generación de movimientos terapéuticos personalizables del tobillo. El modelo permite ajustar de manera independiente amplitud, frecuencia y fase para producir trayectorias que abarcan desde ejercicios básicos de movilidad hasta patrones complejos orientados al entrenamiento del control motor y la propiocepción. La

incorporación de pausas y progresiones refuerza la aplicabilidad clínica del enfoque, al reproducir y ampliar protocolos de rehabilitación tradicionales mediante una formulación matemática simple, precisa y reproducible.

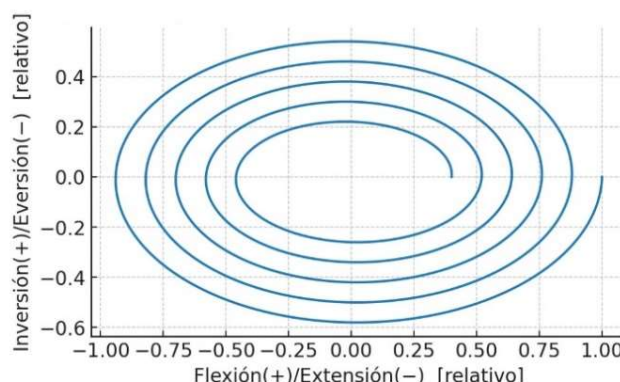


Fig. 6. Espiral progresiva con amplitudes crecientes simulando incremento gradual del rango articular. Parámetros:  $A_o=5^\circ$ ,  $A_f=20^\circ$ ,  $B_o=2.5^\circ$ ,  $B_f=10^\circ$ ,  $a:b=1:1$ ,  $\delta=\pi/2$ , 5 ciclos.

#### IV. DISCUSIÓN

Los resultados obtenidos en este trabajo confirman que las curvas de Lissajous constituyen una herramienta matemática adecuada para la generación de trayectorias terapéuticas del tobillo, al permitir describir movimientos bidimensionales suaves, continuos y fácilmente parametrizables. A diferencia de enfoques tradicionales basados en trayectorias uniplanares o patrones geométricos fijos, la formulación propuesta ofrece una familia completa de trayectorias que puede ajustarse de manera sistemática mediante un número reducido de parámetros, sin modificar la estructura matemática ni la arquitectura del sistema robótico.

Uno de los principales aportes del enfoque propuesto radica en su carácter general y flexible. Mientras que varios trabajos previos han abordado la generación de trayectorias a partir de modelos biomecánicos o musculoesqueléticos específicos [11,12], dichos enfoques suelen requerir procesos de identificación complejos y presentan una dependencia directa del sistema robótico o del paciente. En contraste, el uso de curvas de Lissajous permite desacoplar el diseño de la trayectoria de la modelación biomecánica detallada, facilitando su implementación en distintas plataformas robóticas y contextos terapéuticos. Esta característica resulta especialmente relevante en entornos clínicos donde la simplicidad, la reproducibilidad y la adaptabilidad del sistema son factores clave.

La capacidad de ajustar de forma independiente amplitud, frecuencia y fase proporciona un control directo sobre aspectos terapéuticos fundamentales, tales como el rango articular, la velocidad del movimiento y la coordinación entre ejes. En particular, la fase relativa emerge como un parámetro crítico para modular la complejidad del movimiento, permitiendo transitar desde trayectorias simples, como movimientos elípticos, hasta patrones más exigentes en términos de control motor, como las trayectorias en forma de "8". Esta progresión de complejidad es consistente con principios ampliamente

aceptados en rehabilitación, donde los ejercicios evolucionan desde tareas básicas de movilidad hacia actividades que demandan mayor control neuromuscular y propioceptivo.

La incorporación de pausas controladas en los extremos del rango articular representa otro aspecto relevante del enfoque propuesto. A diferencia de trayectorias puramente periódicas, la introducción de intervalos de permanencia permite reproducir estiramientos sostenidos comúnmente empleados en la práctica clínica. Desde el punto de vista matemático, el uso de una función de fase por tramos garantiza transiciones suaves entre fases de movimiento y reposo, evitando discontinuidades que podrían generar picos dinámicos indeseables. Este resultado sugiere que el modelo no solo es capaz de generar trayectorias geométricamente adecuadas, sino también de incorporar características temporales alineadas con protocolos terapéuticos reales.

Asimismo, las trayectorias progresivas en forma de espiral evidencian el potencial del modelo para representar incrementos graduales del rango articular dentro de una misma sesión terapéutica. Este tipo de comportamiento resulta particularmente pertinente en etapas iniciales de la rehabilitación, donde la aplicación inmediata del rango máximo puede no ser recomendable. La posibilidad de parametrizar la progresión del movimiento ofrece una herramienta adicional para personalizar la terapia y acompañar de manera controlada la evolución del paciente, sin necesidad de redefinir manualmente múltiples trayectorias.

Desde una perspectiva más amplia, los resultados de este estudio sugieren que las curvas de Lissajous pueden interpretarse como un marco matemático unificador capaz de englobar diversos ejercicios de rehabilitación tradicional del tobillo, tales como círculos, cambios continuos de dirección y patrones en "8". Esta capacidad de generalización abre la puerta a la estandarización y sistematización del diseño de trayectorias terapéuticas, facilitando su integración en sistemas de rehabilitación robótica con diferentes niveles de complejidad y grados de asistencia.

Finalmente, aunque el presente trabajo se limita a simulación matemática y validación gráfica, la discusión de los resultados pone de manifiesto el potencial del enfoque para futuras extensiones experimentales y clínicas. La formulación propuesta sienta las bases para estudios posteriores orientados a su implementación en prototipos robóticos, así como a la evaluación de su impacto en variables clínicas como rango de movimiento, control motor y propiocepción del tobillo. En este sentido, los resultados obtenidos no deben interpretarse como conclusiones clínicas definitivas, sino como un paso fundacional hacia el desarrollo de estrategias de generación de trayectorias más flexibles y adaptables en la rehabilitación robótica del tobillo.

## V. CONCLUSIÓN

En este trabajo se presentó un enfoque paramétrico para la generación de trayectorias terapéuticas del tobillo basado en curvas de Lissajous, orientado a su aplicación en sistemas robóticos de rehabilitación. A partir de una formulación matemática simple, fue posible generar una amplia variedad de

trayectorias bidimensionales suaves y continuas, capaces de representar ejercicios terapéuticos comúnmente utilizados en la rehabilitación del tobillo, así como patrones de movimiento de mayor complejidad.

Los resultados obtenidos demuestran que el modelo propuesto permite ajustar de manera independiente parámetros clave del movimiento. Específicamente, se generaron trayectorias dentro de rangos articulares clínicamente relevantes ( $\pm 20^\circ$  en flexión-extensión y  $\pm 10^\circ$  en inversión-eversión), incorporando pausas de estiramiento de 2 s en los cuatro extremos articulares y progresiones en espiral con incremento de amplitud desde el 25% hasta el 100% del rango objetivo a lo largo de 5 ciclos. La variación de la fase relativa  $\delta$  entre 0 y  $\pi$  permitió transitar de trayectorias elípticas simples hasta patrones en forma de '8', modificando cualitativamente la complejidad del movimiento sin alterar la estructura matemática del modelo. Estos resultados son consistentes con los rangos de operación reportados para sistemas robóticos de referencia como el Rutgers Ankle [7] y el ARBOT [9], lo que respalda la aplicabilidad clínica del enfoque propuesto. La incorporación de pausas controladas en los extremos del rango articular y de trayectorias progresivas con incremento gradual de amplitud amplía la aplicabilidad del enfoque, al permitir la reproducción y extensión de protocolos terapéuticos tradicionales mediante una formulación matemática coherente y reproducible. Estas características refuerzan el carácter flexible y general del método, el cual puede integrarse en diferentes arquitecturas robóticas sin requerir modificaciones estructurales ni modelos biomecánicos específicos.

En conjunto, el enfoque basado en curvas de Lissajous constituye una base sólida para el diseño sistemático de trayectorias personalizables en la rehabilitación robótica del tobillo. Como trabajo futuro, se plantea la implementación del modelo en un prototipo robótico funcional y su evaluación experimental, con el fin de analizar su desempeño en contextos terapéuticos reales y explorar su impacto en variables clínicas relevantes como el rango de movimiento, el control motor y la propiocepción. En particular, será necesario abordar los desafíos asociados a la interacción física entre el robot y el paciente, incluyendo la respuesta del sistema ante la resistencia activa o espástica del usuario, la adaptación en tiempo real de los parámetros de trayectoria según la condición clínica, y el desarrollo de estrategias de control que garanticen seguridad y confort durante la ejecución de los movimientos terapéuticos.

## REFERENCIAS

- [1] D. T. P. Fong, Y. Hong, L. K. Chan, P. S. H. Yung, and K. M. Chan, "A systematic review on ankle injury and ankle sprain in sports," *Sports Medicine*, vol. 37, no. 1, pp. 73–94, 2007.
- [2] B. R. Waterman, J. Owens, D. Davey, et al., "The epidemiology of ankle sprains in the United States," *Journal of Bone and Joint Surgery*, vol. 92, no. 13, pp. 2279–2284, 2010.
- [3] R. M. van Rijn, et al., "What is the clinical course of acute ankle sprains? A systematic review," *American Journal of Medicine*, vol. 121, no. 4, pp. 324–331, 2008.
- [4] H. S. Jørgensen, H. Nakayama, H. O. Raaschou, and T. S. Olsen, "Recovery of walking function in stroke patients: the Copenhagen Stroke Study," *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation*, vol. 76, no. 1, pp. 27–32, 1995.

- [5] M. G. Alvarez-Perez, M. A. Garcia-Murillo, and J. J. Cervantes-Sánchez, "Robot-assisted ankle rehabilitation: a review," *Disability and Rehabilitation: Assistive Technology*, vol. 15, no. 4, pp. 394–408, 2020.
- [6] M. Dong, Y. Zhou, J. Li, X. Rong, W. Fan, and X. Zhou, "State of the art in parallel ankle rehabilitation robot: a systematic review," *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, vol. 18, no. 1, p. 52, 2021.
- [7] M. Girone, G. Burdea, M. Bouzit, et al., "The 'Rutgers Ankle' orthopedic rehabilitation interface," in *Proc. ASME Dynamic Systems and Control Division*, vol. 67, Nashville, USA, 1999, pp. 305–312.
- [8] P. K. Jamwal, S. Q. Xie, and K. C. Aw, "Kinematic design optimization of a parallel ankle rehabilitation robot using modified genetic algorithm," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 57, no. 9, pp. 1018–1027, 2009.
- [9] J. A. Saglia, N. G. Tsagarakis, J. S. Dai, and D. G. Caldwell, "Control strategies for patient-assisted training using the ankle rehabilitation robot (ARBOT)," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 18, no. 6, pp. 1799–1808, 2013.
- [10] Z. Zhou, Y. Zhou, N. Wang, et al., "A proprioceptive neuromuscular facilitation integrated robotic ankle-foot system for post-stroke rehabilitation," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 73, pp. 111–122, 2015.
- [11] Y. H. Tsoi and S. Q. Xie, "Trajectory generation for ankle rehabilitation: a biomechanical model based approach," in *Proc. UKACC Int. Conf. on Control (CONTROL)*, Coventry, UK, 2010, pp. 1124–1129.
- [12] P. K. Jamwal, S. Hussain, Y. H. Tsoi, et al., "Musculoskeletal model for path generation and modification of an ankle rehabilitation robot," *IEEE Transactions on Human-Machine Systems*, vol. 50, no. 5, pp. 373–383, 2020.
- [13] A. V. Borkar, A. Sinha, L. Vachhani, and H. Arya, "Application of Lissajous curves in trajectory planning of multiple agents," *Autonomous Robots*, vol. 44, pp. 233–250, 2020.
- [14] K. Takiyama and H. Yokoyama, "Speed- and mode-dependent modulation of the center of mass trajectory in human gaits as revealed by Lissajous curves," *Journal of Biomechanics*, vol. 110, p. 109947, 2020.
- [15] T. Tuma, J. Lygeros, et al., "High-speed multiresolution scanning probe microscopy based on Lissajous scan trajectories," *Nanotechnology*, vol. 23, no. 18, p. 185501, 2012.
- [16] D. J. Amin, "The relationship between ankle joint physiological characteristics and balance during quiet stance," *Journal of Biomechanics*, vol. 47, no. 13, pp. 3109–3113, 2014.